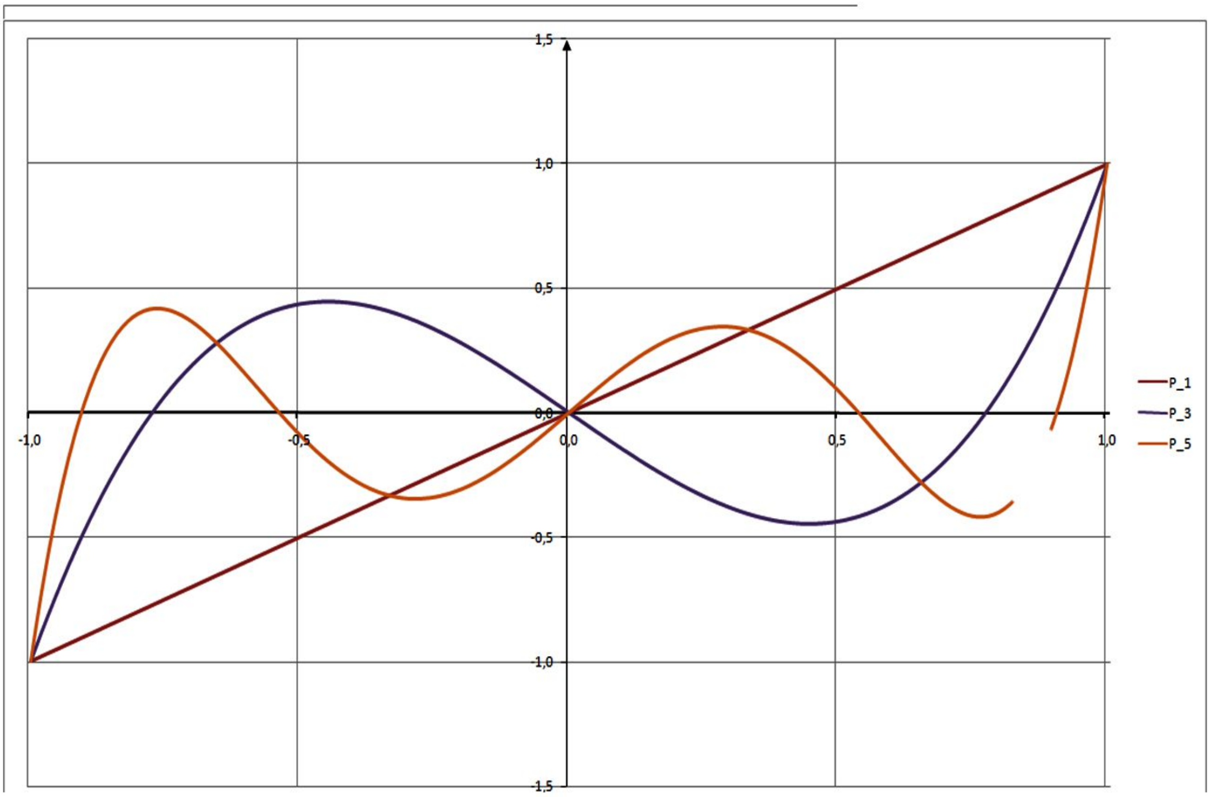
§7. Полиномы Лежандра

Перейдем к изучению специальных сферических функций, возникающих в сферической системе координат. Они выражаются через так называемые функции Лежандра.

Важнейший представитель этого класса — полиномы Лежандра:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right], \quad n=0, 1, 2, \dots$$



Рассмотрим $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами (x, y, z)

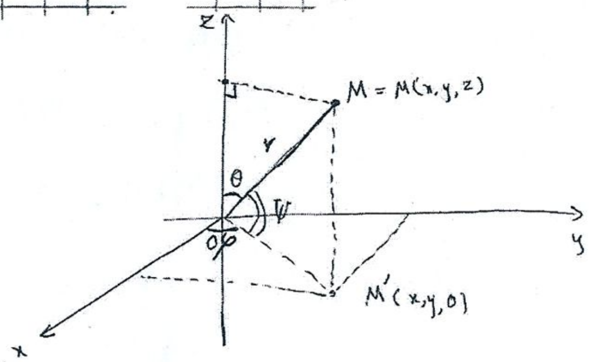
$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ — классический оператор Лапласа.

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — классич. опер-р Лапласа

В сферич. симм. областях (шар, вне шара, шаровой слой) естественно вводить сферич. с-му коорд. (r, θ, φ).

Ф-лы перехода:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



$0 \le r < +\infty$, $0 \le \theta \le \pi$,

$0 \le \varphi \le 2\pi$, (φ — 2π-периодич. угол)

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Оператор Лапласа в сферич. коорд:

$$\Delta(u) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

На оси Oz лапласиан вырождается из сферич. с-мы коорд.

Общий вид гармонич. ф-ций в типичных областях (Общий ориентир)

1) $\Delta u = 0$ в шаре, $0 \le r \le R \Rightarrow$

$u(r,\theta,\varphi) = A_0^0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(A_n^0 P_n(\cos\theta) +$
$+ \sum_{m=1}^{n} (A_n^m \cos m\varphi + B_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta)\Big) \left(\frac{r}{R}\right)^n$, где
A_n^m, B_n^m – обычные числа (числов. коэфф-ты), $P_n(t)$ – полиномы Лежандра,
$P_n^m(t)$ – присоединенные ф-ции Лежандра;
$t = \cos\theta$, $|t| \leq 1$.

2) $\Delta u = 0$ вне шара, $R \leq r < +\infty$

$(r,\theta,\varphi) = A_0^0 \frac{R}{r} + \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(A_n^0 P_n(\cos\theta) +$
$+ \sum_{m=1}^{n} (A_n^m \cos m\varphi + B_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta)\Big) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$

// Эти ф-лы испол-ся в астрономии, геофизике, при запуске спутников, т.е. в серьёзной МФ //

Полиномы Лежандра

// ∃ много способов для введения, но будем испол-ть следующ. //

Ф-ла Родрига для полиномов Леж.:

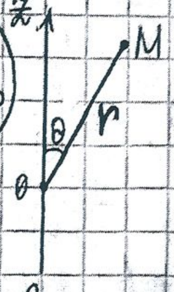
$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Обычно $t \in [-1, 1]$ ($t = \cos\theta$)

Степень $P_n(t) = n$

$P_n(t) = 2^{-n}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}t^n + \dots$, где $2^{-n}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = 2^{-n}\cdot C_{2n}^n$ — старший коэфф-т

$\boxed{C_{2n}^n \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \text{ при } n\to+\infty}$ (стандарт. асимптотика биномиального коэфф-та)

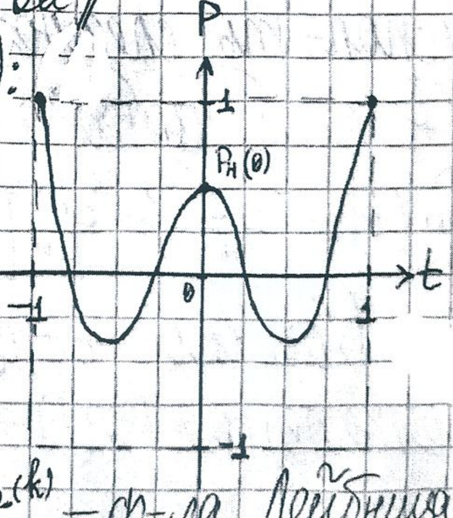


$2^{-n}C_{2n}^n \sim \frac{2^n}{\sqrt{\pi n}}$ при $n\to+\infty$ (экспоненц. рост)

Элементарные св-ва пол. Леж.

1. $P_n(-t) = (-1)^n P_n(t)$, $\forall n$ (четность/нечетность) //Очевидно, $\Rightarrow$ из ф-лы//
2. $P_n(1) = 1$,
   $P_n(-1) = (-1)^n$ (нормировка)
3. $|P_n(t)| < 1$ при $\forall t\in(-1,1)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\neq 0$ //без док-ва// (ограниченность внутри отрезка)
4. $P_n(t)$ при $t\in(-1,1)$ имеет n различных корней, $\forall n\in\mathbb{N}$ //без док-ва//

Примерный вид для $P_4(t)$:



Док-во св-ва 2.

▲ $P_n(1) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right]\Big|_{t=1} =$

$= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left[\underbrace{(t-1)^n}_{u}\underbrace{(t+1)^n}_{v}\right]\Big|_{t=1} =$

$= \{(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$ — ф-ла Лейбница$\} =$

$=$ все производные (n штук) попались на u, а $u|_{t=1}=0$ $\} = \frac{1}{2^n n!} n! (t+1)^n \big|_{t=1} + 0 = \frac{2^n}{2^n} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Второе утв. аналогично ■

Несколько первых полиномов в явной записи:

$P_0(t) = 1,$

$P_1(t) = t,$

$P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1),$

$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t),$

$P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3),$

$\ldots$

// Проверка на правильность — при помощи св-ва нормировки //

Обратные выражения:

$1 = P_0(t),$

$t = P_1(t),$

$t^2 = \frac{1}{3}(P_0(t) + 2P_2(t)),$

$t^3 = \frac{1}{5}(3P_1(t) + 2P_3(t)),$

$t^4 = \frac{1}{35}(7P_0(t) + 20P_2(t) + 8P_4(t)),$

Упр: док-ть, что в разложениях для обратных выражений неотрицат. коэфф-ты

Базисность пол. Леж.

$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ – стандартное скалярн. произведение на $[-1,1]$

1) $(P_n, P_m)=\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)dt=0$, $n\neq m$ (ортогональность)

2) $\|P_n(t)\|^2=(P_n,P_n)=\int_{-1}^{1}(P_n(t))^2dt=\frac{2}{2n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

3) Ряды Фурье по пол. Леж.:

$f(t)\sim\sum_{n=0}^{+\infty} C_n P_n(t)$ на $[-1,1]$, где

$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)P_n(t)dt$

Уравнение Лежандра

$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dw(t)}{dt}\right)+\lambda w(t)=0$, $-1<t<1$

// Здесь w – дубль в (маленькая), не омега! //

Развернутая запись: $(1-t^2)w''(t)-$
$-2tw'(t)+\lambda w(t)=0$, $-1<t<1$

$t=\pm1$ (особые т. ур-ния) – в них нарушается теорема $\exists$ и !, и большинство решений уходит на ∞; они не физичны $\Rightarrow$ можно отбросить

Спектральная задача для ур-я Леж.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dw(t)}{dt}\right) + \tilde{\lambda} w(t) = 0, & -1<t<1, \\ |w(\pm 1)| < +\infty \end{cases} \quad (*)$$

Требуется найти значения $\tilde{\lambda}$, при которых ур-ние имеет решения, ограниченные на концах отрезка.

Физ. смысл: $t = \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0,$

$t = \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi,$

$t = \pm 1 \Rightarrow$ точка на оси $Oz \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ищется решение, ограниченное на оси Oz.

Спектр задачи $(*)$: $\tilde{\lambda}_n = n(n+1)$, $w_n(t) = P_n(t)$ (с точностью до const),

$n = 0, 1, 2, \ldots$ // Это громоздкая задача, будет обзор //

Доп. лит-ра: Лизоркин П. И. „Курс дифференц. и интегральных ур-ний с доп. главами анализа" („Москва, „Наука", 1981)

[Глава 4] + файл с почты

Типичная задача из МФ

Ур-ние Лапласа вне шара в R^3 — задача Дирихле: //Ищется внешний потенциал//

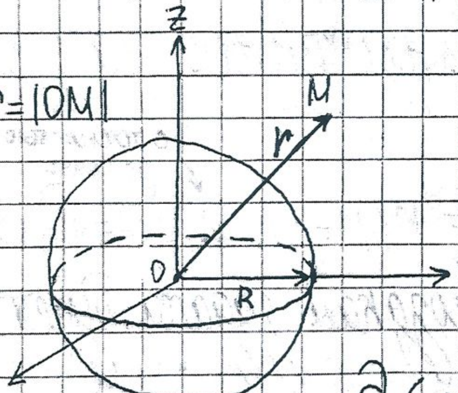
$$\begin{cases} \Delta u = 0, \; r > R, & \text{//R — радиус сферы//} \\ u|_{r=R} = F(\theta), & \text{//на поверхности задан потенциал//} \\ |u| \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0 & \text{//регулярность на } \infty\text{//} \end{cases}$$

$F(\theta)$ — задан, не зависит от φ (для простоты)

$u = u(r, \theta) = ?$

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}}_{=0} = 0$$

$r = |OM|$



В редуцированной форме:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0$$

Элементарные решения $(\not\equiv 0)$: $u(r,\theta) = \rho(r)\omega(\theta)$

//Здесь уже ω — омега!; а ρ — „ро"//

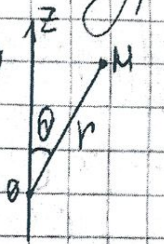
$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\rho(r)}{dr}\right)\omega(\theta) + \rho(r)\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\omega(\theta)}{d\theta}\right) = 0$$

Пропорция ($\lambda = \text{const}$):

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\rho(r)}{dr}\right)}{\rho(r)} = \frac{-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\omega(\theta)}{d\theta}\right)}{\omega(\theta)} = \lambda$$

Ур-ние для $w(\theta)$ — подготовительное ур-ние Леж.: $\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dw(\theta)}{d\theta}\right)+\lambda w(\theta)=0$

↳сферич. угол



Каноннич. замена: $w(\theta)=W(\cos\theta)=$
$=W(t),\ t=\cos\theta$

Ключевой момент: $\frac{d}{d\theta}=\frac{d}{dt}\cdot\frac{dt}{d\theta}=\{t=\cos\theta\}=$
$=-\sin\theta\frac{d}{dt}$ //получили связь дифференц. операторов//

Подстановка: $\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dw(\theta)}{d\theta}\right)=$
$=\cancel{\frac{1}{\sin\theta}}\left(-\cancel{\sin\theta}\right)\frac{d}{dt}\left(-\sin^2\theta\frac{dW(t)}{dt}\right)=\{\sin^2\theta=$
$=1-\cos^2\theta=1-t^2\}=\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dW(t)}{dt}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ур-ние для $w(\theta)$ принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dW(t)}{dt}\right)+\lambda W(t)=0,\ -1<t<1\ -$$

— стандартное ур-ние Леж.

Добавляем условия ограниченности на концах и получаем спектр. задачу для ур-ния Леж.:

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dW(t)}{dt}\right)+\lambda W(t)=0,\ -1<t<1,\\ |W(\pm 1)|<\infty\end{cases}$$

Спектр: $\lambda_n=n(n+1)$, $W_n(t)=P_n(t)$, $n=0,1,2,$

Подставляя Y_n в пропорцию, найдем $g(r)$:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dg(r)}{dr}\right)-(n+1)n\,g(r)=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow r^2 g''(r)+2rg'(r)-n(n+1)g(r)=0$ — ур-ние Эйлера

Ищем реш-е в виде стандартн. подстановки $g(r)=r^\alpha \Rightarrow$ получаем характер. ур-ние

$\alpha(\alpha-1)+2\alpha-n(n+1)=0 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha-n(n+1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha_1=n,\\ \alpha_2=-(n+1)\end{array}\right.$$

ФСР для ур-ния Эйлера: $r^n,\ \frac{1}{r^{n+1}},\ n=0,1,2,\dots$

Получили наборы частных реш-й ур-ния Лапласа:

1) $P_n(\cos\theta)\cdot r^n,\ n=0,1,2,\dots$ — для внутр. задач

2) $P_n(\cos\theta)\frac{1}{r^{n+1}},\ n=0,1,2,\dots$ — для внешн. зад.

Редуцированная запись с учетом радиуса задачи:

1') $P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n,\ n=0,1,2,\dots$ — для внутр. зад.

2') $P_n(\cos\theta)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1},\ n=0,1,2,\dots$ — для внешн. зад.

Общий вид гармонических ф-ций вне шара:

$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\cos\theta)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}, \quad r \geq R$

$B_n = ?$

Кр. условие: $u(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\cos\theta) = \mathcal{F}(\theta) = f(\cos\theta)$ — ряд по элементар. сферич. ф-циям $P_n(\cos\theta)$

Замена: $t = \cos\theta \Rightarrow f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(t)$ на $[-1,1]$ — ряд Фурье

Формулы Фурье: $B_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(t) P_n(t)\,dt$

Классич. ответ: $\boxed{u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\cos\theta)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}, \ r \geq R,}$

$\boxed{\text{где } B_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(t) P_n(t)\,dt}$

Вывод: общий вид гарм. ф-ций $u = u(r,\theta)$ в типичн. областях:

а) в шаре: $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^{n}, \quad 0 \leq r \leq R;$

б) вне шара: $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\cos\theta)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}, \quad R \leq r < +\infty$

в) в шаровом слое: $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta)\, r^n + \sum_{n=0}^{\infty} D_n P_n(\cos\theta)\frac{1}{r^{n+1}}, \quad R_1 \leq r \leq R_2$